環

数学の解答は解答用紙の解答欄 (1)~(121) にマークしてください.

数学 I

(1) n を 2 以上の整数とする.

(a) $x+y \leqq n$ を満たす互いに素な正の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を $a(n)$ とする. 例えば $n=4$ のとき, この条件を満たす組は $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 1)$ であるため, $a(4)=5$ である. また, $n=9$ のとき, $a(9)=\boxed{(1)}\boxed{(2)}$ である.

(b) $(x+y)z \leqq n$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ のうち, x と y が互いに素であるような組の個数を $b(n)$ とする. 例えば $n=4$ のとき, この条件を満たす組は $(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 3,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 1)$ であるため, $b(4)=6$ である. また, $n=9$ のとき, $b(9)=\boxed{(3)}\boxed{(4)}$, $n=30$ のとき, $b(30)=\boxed{(5)}\boxed{(6)}\boxed{(7)}$ である.

(2) A さんはテニスのサーブを一人で繰り返し行っており, 2 回連続で失敗した時点でサーブを止める. A さんのサーブが成功する確率は $\dfrac{1}{3}$, 失敗する確率は $\dfrac{2}{3}$ である. いま, n 回目 (n は 2 以上の整数) のサーブで止めずに, $n+1$ 回目のサーブにのぞむ確率を p_n とすると

$$p_2=\frac{\boxed{(8)}\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}\boxed{(11)}},\ p_3=\frac{\boxed{(12)}\boxed{(13)}}{\boxed{(14)}\boxed{(15)}},\ p_4=\frac{\boxed{(16)}\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}\boxed{(19)}},\ p_5=\frac{\boxed{(20)}\boxed{(21)}\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}\boxed{(24)}\boxed{(25)}}$$

である.

数学II

正の整数 m に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \sin^2 \frac{\pi}{m}$$

$$a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$$

と定める.

(1) $m = 24$ のとき

$$a_2 = \frac{\boxed{(26)}\boxed{(27)} + \boxed{(28)}\boxed{(29)}\sqrt{\boxed{(30)}\boxed{(31)}}}{\boxed{(32)}\boxed{(33)}},\ a_3 = \frac{\boxed{(34)}\boxed{(35)}}{\boxed{(36)}\boxed{(37)}},\ a_4 = \frac{\boxed{(38)}\boxed{(39)}}{\boxed{(40)}\boxed{(41)}}$$

である.

(2) $m = 9$ のとき，$a_{100} = a_{100+k}$（k は正の整数）となる最小の k は $\boxed{(42)}\boxed{(43)}$ である.

(3) a_{100}，a_{101}，a_{102} が相異なり，$a_{100} = a_{103}$ となるような m のうち，最小のものは $\boxed{(44)}\boxed{(45)}$ である.

(4) a_{100}，a_{101}，a_{102}，a_{103} が相異なり，$a_{100} = a_{104}$ となるような m のうち，最小のものは $\boxed{(46)}\boxed{(47)}$ である.

数学Ⅲ

(1)　x の方程式 $x^3 - 3ax^2 + a = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつような実数 a のとりうる値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{(48)}\boxed{(49)}}{\boxed{(50)}\boxed{(51)}} \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{(52)}\boxed{(53)}}{\boxed{(54)}\boxed{(55)}} < a$$

である．

(2)　x の方程式 $|x-1|^3 = 3bx^2 - 6bx - 4b + 3$ が異なる 4 つの実数解をもつような実数 b のとりうる値の範囲は

$$\frac{\boxed{(56)}\boxed{(57)}}{\boxed{(58)}\boxed{(59)}} < b < \frac{\boxed{(60)}\boxed{(61)}}{\boxed{(62)}\boxed{(63)}} \quad \text{または} \quad \boxed{(64)}\boxed{(65)} < b$$

である．

数学Ⅳ

3 つの異なる 0 でない複素数 α，β，γ に対して，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ が存在し，次の条件を満たしている．

$$\frac{-i\overline{\gamma}-\beta}{\gamma-\beta}=\cos\theta+i\sin\theta,\quad \frac{-i\overline{\gamma}-\alpha}{\gamma-\alpha}=\left(\frac{\gamma-\beta}{-i\overline{\gamma}-\beta}\right)^2,\quad \frac{-i\overline{\gamma}}{\gamma}=\left(\frac{\gamma-\alpha}{-i\overline{\gamma}-\alpha}\right)^2$$

(1) $|\gamma|=2\sqrt{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，γ の虚部が正のとき

γの実部は $\boxed{(66)\,(67)}+\sqrt{\boxed{(68)\,(69)}}$，　αの実部は $\boxed{(70)\,(71)}$，

$|\gamma-\beta|=\boxed{(72)\,(73)}+\boxed{(74)\,(75)}\sqrt{\boxed{(76)\,(77)}}$

である．

(2) $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$|\gamma|=5$ のとき

$$|\gamma+i\overline{\gamma}|=\frac{\boxed{(78)\,(79)}}{\boxed{(80)\,(81)}},\quad |\alpha|=\frac{\boxed{(82)\,(83)}}{\boxed{(84)\,(85)}},\quad |\gamma-\beta|=\frac{\boxed{(86)\,(87)}}{\boxed{(88)\,(89)}}\sqrt{\boxed{(90)\,(91)}}$$

である．

数学V

正四角錐（すい）とは，底面が正方形，側面が合同な4個の二等辺三角形からなる立体である．いま，図1のように，1辺の長さが1である正方形の紙ABCDに，図2の正四角錐P − EFGHの展開図が描かれている．この展開図において，EFとAB，FGとBC，GHとCD，HEとDAはそれぞれ平行であり，二等辺三角形P_1FE，P_2GF，P_3HG，P_4EHの頂点P_1，P_2，P_3，P_4は，それぞれAB，BC，CD，DA上に存在する．この紙から四角形AP_1EP_4，BP_2FP_1，CP_3GP_2，DP_4HP_3を切り捨て，EF，FG，GH，HEで折り曲げ，P_1，P_2，P_3，P_4が正四角錐の頂点Pと一致するように，P_1FとP_2F, P_2GとP_3G，P_3HとP_4H，P_4EとP_1Eをそれぞれ合わせる．ただし，紙の厚さは考慮しないものとする．

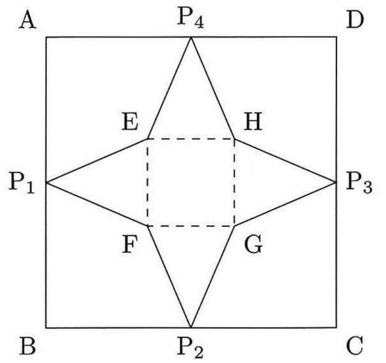

図1

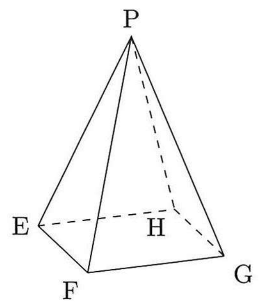

図2

(1) 側面がすべて正三角形となるとき，$\mathrm{EF} = \dfrac{\boxed{(92)}\boxed{(93)} + \sqrt{\boxed{(94)}\boxed{(95)}}}{\boxed{(96)}\boxed{(97)}}$ である．

(2) 正四角錐の体積が最大となるのは, $\mathrm{EF} = \dfrac{\boxed{(98)}\boxed{(99)}}{\boxed{(100)}\boxed{(101)}}$ のときであり, その体積は $\dfrac{\boxed{(102)}\boxed{(103)}\sqrt{\boxed{(104)}\boxed{(105)}}}{\boxed{(106)}\boxed{(107)}\boxed{(108)}}$ である．

今度は，図3のように，1辺の長さが1である正方形の紙ABCDに，正四角錐P − EFGHの展開図が上記とは異なる方法で描かれている．この展開図において，EFとDB，FGとAC，GHとBD，HEとCAはそれぞれ平行であり，点A，B，C，Dは各二等辺三角形の頂点となっている．この紙から△ABF，△BCG，△CDH，△DAEを切り捨て，EF，FG，GH，HEで折り曲げ，A，B，C，Dが正四角錐の頂点Pと一致するように，AFとBF, BGとCG，CHとDH，DEとAEをそれぞれ合わせる．ただし，紙の厚さは考慮しないものとする．

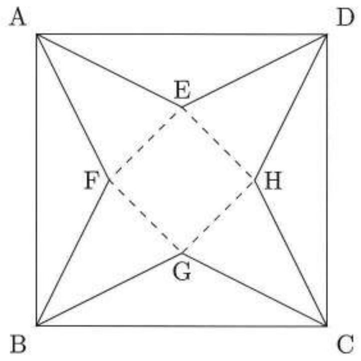

図 3

(3) 正四角錐の体積が最大となるのは，EF $= \dfrac{\boxed{(109)}\boxed{(110)}\sqrt{\boxed{(111)}\boxed{(112)}}}{\boxed{(113)}\boxed{(114)}}$ のときであり，その体積は

$\dfrac{\boxed{(115)}\boxed{(116)}\sqrt{\boxed{(117)}\boxed{(118)}}}{\boxed{(119)}\boxed{(120)}\boxed{(121)}}$ である.